Musterlösung 10

1. **a)** Sei X exponentialverteil mit Parameter μ, d.h. die Dichte von X ist $f_X(x) = \mu e^{-\mu x}$ für $x \geq 0$ und 0 sonst. Es folgt, dass

$$E[X] = \int_0^\infty x\mu e^{-\mu x} dx = 1/\mu.$$

Also ist R exponentialverteilt mit Parameter $\mu = \lambda$.
Der Flächeninhalt des Kreises mit Radius R ist gegeben durch die Zufallsvariable $A = \pi R^2$. Die Verteilungsfunktion von A ist

$$F_A(x) = P[A \leq x] = P\left[R \leq \sqrt{x/\pi}\right] = \int_0^{\sqrt{x/\pi}} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda\sqrt{x/\pi}}, \quad \text{falls } x \geq 0,$$

und 0 sonst. Die Dichtefunktion ist dann gegeben durch $f_A(x) = \frac{d}{dx} F_A(x) = \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi x}} e^{-\lambda\sqrt{x/\pi}}$ falls $x \geq 0$ und 0 sonst.

b)

$$E[A] = E[\pi R^2] = \int_0^\infty \pi t^2 f_R(t) dt = \pi\lambda \int_0^\infty t^2 e^{-\lambda t} dt \stackrel{(*)}{=} \frac{2\pi}{\lambda^2}.$$

(*) partielle Integration (2 Mal).

BEMERKUNG: Es ist auch möglich, den Erwartungswert mit Hilfe der Dichte f_A aus Aufgabe **a)** zu bestimmen.

c) Wir setzen $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = 1$, also

$$\int_0^\infty \frac{c}{(1+x)^5} dx = c\Big[-\frac{1}{4}(1+x)^{-4}\Big]_0^\infty = \frac{c}{4} = 1,$$

und bestimmen so $c = 4$.

Die Verteilungsfunktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F_X(x) = P[X \leq x] &= \int_{-\infty}^x f(y)dy \\ &= \int_0^x \frac{4}{(1+y)^5} dy = \left[-(1+y)^{-4}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{(1+x)^4}, \quad \text{für } x \geq 0, \end{aligned}$$

und 0 sonst.

Bitte wenden!

d) Wir berechnen zunächst

$$E[1+X] = \int_{-\infty}^{\infty} (1+x) f(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{4}{(1+x)^4} dx = 4\Big[-\frac{1}{3}(1+x)^{-3}\Big]_0^{\infty} = \frac{4}{3},$$
$$E[(1+X)^2] = \int_0^{\infty} \frac{4}{(1+x)^3} dx = 4\Big[-\frac{1}{2}(1+x)^{-2}\Big]_0^{\infty} = 2.$$

Damit erhalten wir

$$E[X] = E[1+X] - 1 = \frac{1}{3}, \text{ und}$$
$$E[X^2] = E[(1+X)^2] - 2E[X] - 1 = 2 - \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

e) Für $y < 1$ gilt für die Verteilungsfunktion F_Y von Y,

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[e^X \leq y] \leq P[e^X < 1] = P[X < 0] = 0.$$

Für $y \geq 1$ erhält man

$$F_Y(y) = P[e^X \leq y] = P[X \leq \log y] = F_X(\log y) = 1 - \frac{1}{(1+\log y)^4}.$$

Durch Differenzieren der Verteilungsfunktion erhalten wir die Dichte f_Y von Y:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y < 1, \\ \frac{4}{y(1+\log y)^5} & \text{für } 1 \leq y. \end{cases}$$

2. a) Es muss gelten $\int_0^\infty f_V(v) dv = 1$ und $E[V] = \int_0^\infty v f_V(v) dv = v_0$. Also erhalten wir mit dem Hinweis in der Aufgabe,

$$1 = \int_0^{\infty} C v^2 e^{-\lambda v} dv \overset{x=\lambda v}{=} C \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2 e^{-x} \frac{dx}{\lambda} = \frac{C}{\lambda^3} 2.$$

Es folgt $C = \frac{\lambda^3}{2}$, wobei wir $\lambda > 0$ annehmen. Mit der selben Substitution folgt

$$v_0 = E[V] = \frac{\lambda^3}{2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\lambda v} dv = \frac{\lambda^3}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^3 e^{-x} \frac{dx}{\lambda} = 3! \frac{1}{2\lambda} = 3/\lambda.$$

Es gilt daher $\lambda = 3/v_0$. Bemerke zudem, dass $f_V \geq 0$ gilt, da $C > 0$.

b)

$$Var(V) = E\left[V^2\right] - E\left[V\right]^2 = \frac{\lambda^3}{2} \int_0^{\infty} v^4 e^{-\lambda v} dv - (3/\lambda)^2$$
$$= 4! \frac{1}{2\lambda^2} - 9/\lambda^2 = 3/\lambda^2 = \frac{v_0^2}{3}.$$

Siehe nächstes Blatt!

c)

$$\begin{aligned}E[T] &= E[s_0/V] = s_0 E[1/V] = s_0 \int_0^\infty 1/v f_V(v)dv \\ &= s_0 \int_0^\infty \frac{\lambda^3}{2} v e^{-\lambda v} dv = \frac{s_0\lambda}{2} = \frac{3s_0}{2v_0}.\end{aligned}$$

Beachte, dass $E[1/V] \neq 1/E[V]$, also $E[T] \neq s_0/v_0$.

$$\begin{aligned}Var(T) &= E[T^2] - E[T]^2 = E\left[\frac{s_0^2}{V^2}\right] - \left(\frac{s_0\lambda}{2}\right)^2 = \frac{s_0^2\lambda^3}{2}\int_0^\infty e^{-\lambda v}dv - \left(\frac{s_0\lambda}{2}\right)^2 \\ &= \frac{s_0^2\lambda^2}{2} - \frac{s_0^2\lambda^2}{4} = \frac{s_0^2\lambda^2}{4} = \frac{9s_0^2}{4v_0^2}.\end{aligned}$$

3. Es ist

$$\begin{aligned}P[X < -1.01] &= P[X > 1.01] = 1 - \Phi(1.01) \approx 1 - 0.8438 = 0.1562, \\ P[-3.02 < X \leq 1] &= P[X \leq 1] - P[X \leq -3.02] = \Phi(1) - P[X \geq 3.02] \\ &= \Phi(1) - (1 - \Phi(3.02)) \approx 0.8413 - 1 + 0.998736 \approx 0.8400.\end{aligned}$$

Da

$$\frac{Y - E[Y]}{\sigma_Y} = \frac{Y + 0.2}{3}$$

standardnormalverteilt ist, sind

$$\begin{aligned}P[Y \leq 8.8] &= P[Y + 0.2 \leq 9] = P\left[\frac{Y+0.2}{3} \leq 3\right] = \Phi(3) \approx 0.998650, \\ P[0.43 \leq |Y| < 1.54] &= P[0.43 \leq Y < 1.54] + P[-1.54 < Y \leq -0.43] \\ &= P\left[\frac{0.43+0.2}{3} \leq \frac{Y+0.2}{3} < \frac{1.54+0.2}{3}\right] \\ &\quad + P\left[\frac{-1.54+0.2}{3} \leq \frac{Y+0.2}{3} < \frac{-0.43+0.2}{3}\right] \\ &= \Phi(0.58) - \Phi(0.21) + \Phi(-0.07\bar{6}) - \Phi(-0.44\bar{6}) \\ &\approx 0.7190 - 0.5832 + (1 - 0.5305) - (1 - 0.6724) = 0.2777,\end{aligned}$$

wobei $\Phi(0.07\bar{6})$ und $\Phi(0.44\bar{6})$ durch Interpolation von Tabellenwerten gewonnen wurden.

4. Sei X_i, $i \in \{1, \dots, n = 10\,000\}$, die folgende Zufallsvariable:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{falls das } i\text{-te Auto den neuen Parkplatz benutzt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Annahme sind $X_1, \dots, X_n$ iid mit $P[X_i = 1] = p$ und $P[X_i = 0] = 1 - p$. Die Anzahl Autos auf dem Parkplatz $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ ist somit binomialverteilt mit Parametern n und p, also gilt

$$E_p[S_n] = np \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}_p(S_n) = np(1-p).$$

Bitte wenden!

Wegen des Satzes von De Moivre-Laplace hat man

$$P_p[S_n \leq k] = P_p\left[\frac{S_n - E_p[S_n]}{\text{Var}_p(S_n)^{1/2}} \leq \frac{k - E_p[S_n]}{\text{Var}_p(S_n)^{1/2}}\right] \approx \Phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Bis jetzt haben wir noch nicht berücksichtigt, welcher Wert für p angenommen wird.

a) Sei nun $p = p_0 = 0.8$. Gesucht ist das kleinste k mit $P_{0.8}[S_n \leq k] \geq 0.99$. D.h. mit obiger Approximation $\Phi(\frac{k-8000}{40}) \geq 0.99$, was äquivalent ist zu $\frac{k-8000}{40} \geq \Phi^{-1}(0.99) \approx 2.33$, also $k \geq 8093.2$. (Der Wert 2.33 kann der Normalverteilungs-Tabelle entnommen werden.) Der Parkplatz sollte somit mindestens 8094 Stellplätze haben.

b) i) Wir wählen erneut $p = p_0 = 0.8$ und finden mit der Approximation

$$P_{0.8}[S_n \leq 7500] \approx \Phi\left(\frac{7500 - 8000}{40}\right) = \Phi(-12.5) = 1 - \Phi(12.5) = 0.0000.$$

Wenn also der angenommene Wert von $p = p_0 = 0.8$ tatsächlich stimmt, dann ist mit höchstens 7500 belegten Parkplätzen ein sehr unwahrscheinliches Ereignis eingetroffen.

ii) Nun wählen wir $p = p_1 = 0.76$. Dann gilt

$$P_{0.76}[S_n \leq 7500] \approx \Phi\left(\frac{7500 - 7600}{42.71}\right) = \Phi(-2.34) = 1 - \Phi(2.34) = 0.01.$$

Wenn also $p_1 = 0.76$ dem richtigen p entspricht, dann ist ein Ereignis mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 1% eingetroffen.

iii) Wir sollen nun p^* bestimmen, so dass gilt

$$P_{p^*}[S_n \leq 7500] \approx \Phi\left(\frac{7500 - np^*}{\sqrt{np^*(1-p^*)}}\right) = 5\%.$$

Mit der Tabelle finden wir $\Phi(-1.65) = 5\%$, d.h. es muss $\frac{7500 - 10000p^*}{\sqrt{10000p^*(1-p^*)}} = -1.65$ gelten, was äquivalent ist zu $p^* = 0.757$.